Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

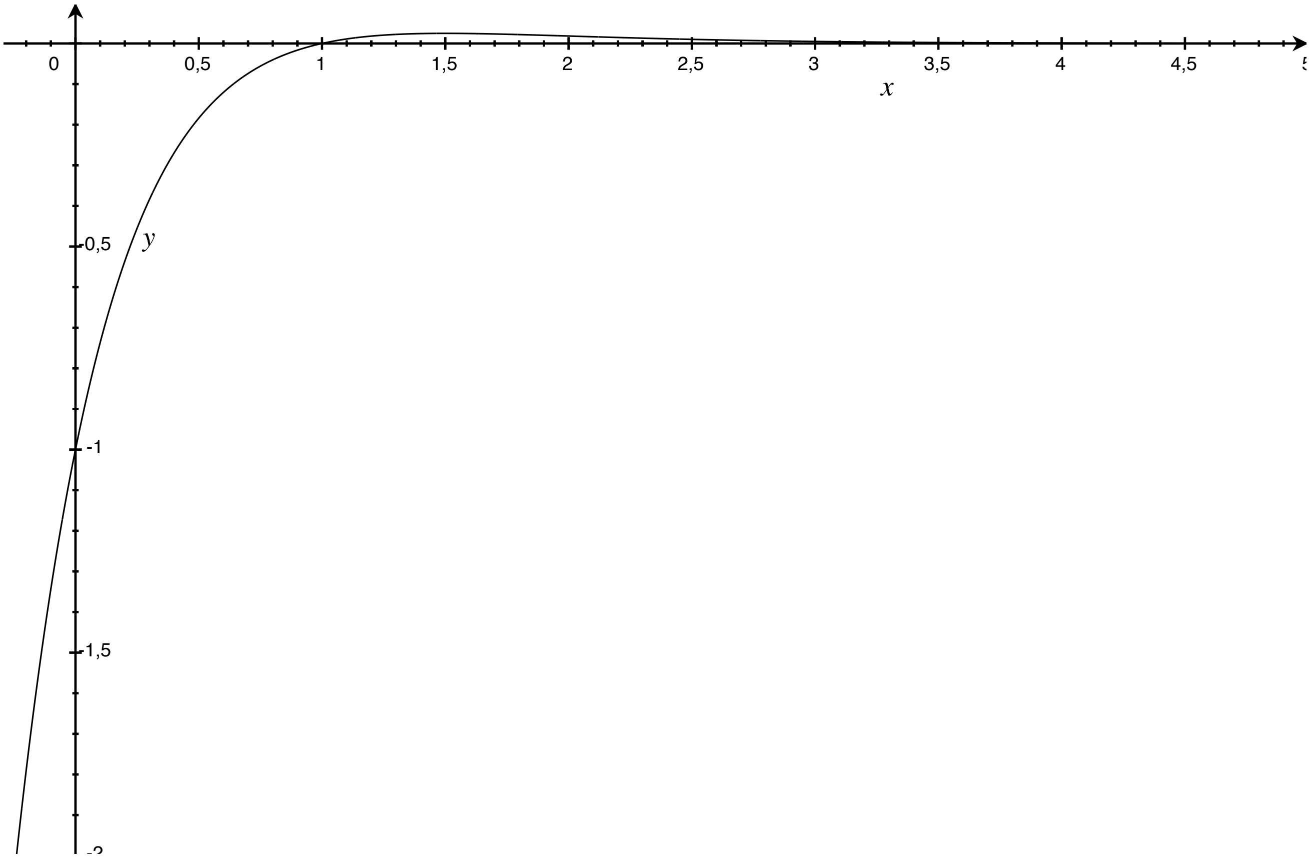
Analisi Matematica - vecchio regolamento

Pisa, 23 maggio 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x-1}{e^{2x}}$$
determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Osserviamo che la funzione esponenziale non si annulla mai, quindi la funzione è definita in tutta la retta reale. La funzione è inoltre derivabile (e quindi continua) in tutto $\mathbb{R}$ essendo prodotto di funzioni derivabili. Vediamo i limiti.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^{2x}} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^{2x}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = 0$$
per gerarchia di inifiniti. La funzione ha quindi l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$. Controlliamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} e^{-2x} = 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty$$
quindi non c'è l'asintoto obliquo. Studiamo ora la monotonia calcolando la derivata.
$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^{2x} - (x-1)2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(1-2x+2)}{e^{4x}} = \frac{3-2x}{e^{2x}}.$$
Dato che $e^{2x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta che
$$f'(x) > 0 \iff 3-2x > 0 \iff 3 > 2x \iff x < \frac{3}{2}.$$
La funzione è strettamente crescente sulla semiretta $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ e strettamente decrescente sulla semiretta $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = \frac{3}{2}$ è di massimo. Il massimo della funzione vale $f(\frac{3}{2}) = \frac{\frac{3}{2}-1}{e^3} = \frac{1}{2e^3}$ mentre la funzione non ha minimo perché non è limitata inferiormente.
Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda.
$$f''(x) = \frac{-2e^{2x} - (3-2x)2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(-2-6+4x)}{e^{4x}} = \frac{4x-8}{e^{2x}}.$$
Avremo quindi che
$$f''(x) > 0 \iff 4x-8 > 0 \iff x > 2.$$
La funzione è quindi strettamente concava in $(-\infty, 2]$, strettamente convessa in $[2, +\infty)$ e il punto di ascissa $x = 2$ è di flesso.



Esercizio 2 Dire se esiste ed eventualmente calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left((\sin n)^6\right)\right)^{n/2}$$

Soluzione

Il limite cercato esiste e vale zero, come andiamo a dimostrare.

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq (\sin n)^6 \leq 1 < \frac{\pi}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dato che la funzione seno è crescente nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$0 \leq \sin\left((\sin n)^6\right) \leq \sin 1 < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq \left[\sin\left((\sin n)^6\right)\right]^{n/2} \leq (\sin 1)^{n/2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

osservando che $\lim_{n\to\infty}(\sin 1)^{n/2} = 0$ e applicando il teorema dei carabinieri si ottiene la tesi.

Esercizio 3 Determinare l'insieme delle primitive della funzione $f(x) = -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)$.

Soluzione

Osserviamo che $-3\cos^2(3x)\sin^3(3x) = -3\cos^2(3x)\left(1-\cos^2(3x)\right)\sin(3x)$, quindi con la sostituzione $\cos(3x) = t,\ -3\sin(3x)\,dx = dt$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)\,dx &= \left(\int t^2(1-t^2)\,dt\right)_{t=\cos(3x)} = \left(\int t^2 - t^4\,dt\right)_{t=\cos(3x)}\\ &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)_{t=\cos(3x)} + c = \frac{\cos^3(3x)}{3} - \frac{\cos^5(3x)}{5} + c\end{aligned}$$

con c costante arbitraria.